Appendice B

Calcolo degli integrali indefiniti

Se f è una funzione continua nell'intervallo X , la totalità delle sue primitive prende il nome di **integrale indefinito** della funzione f , o del differenziale $f(x) dx$, e si indica con il simbolo:

$$\int f(x) dx \quad . \quad (\text{B.0.1})$$

Ogni funzione primitiva dicesi una **determinazione** dell'integrale indefinito. Si ricorda che se F è una primitiva di f , l'insieme delle primitive si ottiene dalla relazione

$$G(x) = F(x) + c$$

al variare della costante c . Si scrive perciò:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

con c costante arbitraria, detta **costante d'integrazione**.

Ci occuperemo, in questa appendice della questione d'individuare delle classi di funzioni elementarmente integrabili e del calcolo delle primitive. A tale scopo risulta utile la seguente tabella di integrali, che chiameremo **integrali indefiniti fondamentali**, e che costituiscono il punto di partenza per affrontare la questione cui dianzi abbiamo accennato:

$$\begin{aligned} \int dx &= x + c \\ \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \forall \alpha \neq -1, & \int \frac{1}{x} dx &= \log |x| + c \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a} + c, & \int e^x dx &= e^x + c \\ \int \cos x dx &= \sin x + c, & \int \sin x dx &= -\cos x + c \end{aligned}$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c, \quad \int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x + c, \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c'$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c = -\operatorname{arccotg} x + c'$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{settsenh} x + c = \log \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settcosh} x + c = \log \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{setttgh} x + c = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$$

Osservazione 126 A proposito dell'integrale di

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e di

$$\frac{1}{1+x^2}$$

ricordiamo che è

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

B.1 Integrazione per decomposizione in somma

Se f_1, f_2 sono funzioni continue in un intervallo, e se c_1, c_2 sono costanti, si ha:

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx$$

Esempio 56 Per il calcolo dell'integrale

$$\int \cos^2 x dx$$

ci ricordiamo che:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

donde:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

B.2 Integrazione per parti

Se u e v sono funzioni derivabili in un intervallo, con derivate continue, si ha:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx \quad (\text{B.2.1})$$

Dimostrazione — Per rendersi conto di ciò, basta osservare che:

$$D[u(x) v(x)] = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$

e quindi, integrando ambo i membri, è:

$$u(x) v(x) = \int u'(x) v(x) dx + \int u(x) v'(x) dx$$

da cui si ricava la (B.2.1). $\square$

La formula (B.2.1) esprime la **regola d'integrazione per parti**; nell'integrale a primo membro i fattori $u(x)$ e $v'(x) dx$ si chiamano, rispettivamente, il **fattore finito** ed il **fattore differenziale**.

La (B.2.1) si può usare quando si debba calcolare un integrale del tipo:

$$\int f(x) g(x) dx \quad (\text{B.2.2})$$

e si conosca una primitiva di uno dei due fattori. Se ad esempio è nota una primitiva G di g , si assume $f(x)$ come fattore finito e $g(x) = dG(x)$ come fattore differenziale. Applicando la (B.2.1) si trova allora:

$$\int f(x) g(x) dx = \int f(x) dG(x) dx = f(x) G(x) - \int f'(x) G(x) dx$$

e così il calcolo dell'integrale (B.2.2) si riconduce al calcolo dell'integrale del prodotto $G(x) f'(x)$. Il procedimento è utile se quest'ultimo integrale o è più semplice di quello di partenza o se quest'ultimo integrale è fondamentale.

Esempio 57 Per calcolare l'integrale:

$$\int x e^x dx \quad ,$$

se si sceglie $e^x dx$ come fattore differenziale si ha:

$$\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$$

Se invece si sceglie $x dx$ come fattore differenziale, si trova:

$$\int x e^x dx = \int e^x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

e, come si vede, si perviene ad un integrale più complicato di quello di partenza.

Il metodo d'integrazione per parti è applicabile anche al calcolo dell'integrale:

$$\int f(x) dx$$

scegliendo $1dx$ come fattore differenziale. Si trova allora:

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx$$

e naturalmente il procedimento è utile se l'integrale di $xf'(x)$ è più semplice di quello di $f(x)$.

Esempio 58 Si ha:

$$\int \log(x) dx = x \log(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x + c = x(\log(x) - 1) + c$$

B.3 Integrazione per sostituzione

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e $\phi(t)$ una funzione continua assieme alla sua derivata prima in un certo intervallo $[\alpha, \beta]$. Supponiamo inoltre che il codominio della $\phi(t)$ sia contenuto in $[a, b]$ in modo che possiamo considerare la funzione composta $f[\phi(t)]$. Posto:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad (\text{B.3.1})$$

è:

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{B.3.2})$$

Premesso ciò, deriviamo la funzione $F[\phi(t)]$. Si ha:

$$DF[\phi(t)] = F'[\phi(t)] \cdot \phi'(t) = f[\phi(t)] \cdot \phi'(t)$$

da cui:

$$F[\phi(t)] = \int f[\phi(t)] \cdot \phi'(t) dt$$

In base alla (B.3.1) possiamo anche scrivere:

$$\left[\int f(x) dx \right]_{x=\phi(t)} = \int f[\phi(t)] \cdot \phi'(t) dt \quad (\text{B.3.3})$$

Se ora supponiamo che la funzione $x = \phi(t)$ sia dotata di funzione inversa $t = \psi(x)$, poichè $\phi[\psi(x)] = x$, ponendo nella (B.3.1) $t = \psi(x)$ si ha:

$$\int f(x) dx = \left[\int f[\phi(t)] \cdot \phi'(t) dt \right]_{t=\psi(x)} \quad (\text{B.3.4})$$

Ora accade sovente che, scegliendo opportunamente la funzione $\phi(t)$, l'integrazione del differenziale $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$ sia più facile che non quella del differenziale $f(x) dx$; la formula (B.3.4) può dunque riuscire, in molti casi, assai utile e il metodo d'integrazione per sostituzione consiste appunto nella sua applicazione.

Esempio 59 Si voglia calcolare l'integrale;

$$\int e^{\alpha x} dx$$

Si ha:

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \left[\int e^t dt \right]_{t=\alpha x} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$$

Esempio 60 Si voglia valutare l'integrale:

$$\int e^{\sin t} \sin t \cos t dt \quad .$$

Si noti che con la sostituzione seguente:

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

si ha:

$$\int e^{\sin t} \sin t \cos t dt = \left[\int e^x x dx \right]_{x=\sin t}$$

ossia:

$$\int e^{\sin t} \sin t \cos t dt = e^{\sin t} (\sin t - 1) + c$$

Esempio 61 Si voglia calcolare:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0 \quad .$$

Notiamo che, in $\mathbb{R}$, tale integrale ha senso se e solo se:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

sicchè possiamo porre:

$$x = a \sin t, \quad \text{con } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Allora è:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = \int a^2 \cos t \sqrt{1 - \sin^2 t} dt = \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) + \int dt \right] = \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right] + c = \frac{a^2}{2} [\sin t \cos t + t] + c \end{aligned}$$

Dalla posizione fatta si ricava:

$$t = \arcsin \frac{x}{a}$$

Si noti che:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} \Rightarrow \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}$$

In definitiva è:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(a^2 + \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + c$$

B.4 Formule di ricorrenza

Spesso s'incontrano integrali del tipo:

$$I_n = \int (f(x))^n g(x) dx$$

con f e g funzioni assegnate, ed n intero maggiore di 1. Si vengono così ad ottenere delle *formule ricorrenti*, i.e. formule che consentono di esprimere I_n mediante I_{n-1} . L'applicazione ripetuta di tale formula consentirà di esprimere I_n mediante I_0 e se quest'ultimo integrale è elementarmente calcolabile tale sarà anche I_n .

Esempio 62 Si voglia calcolare l'integrale:

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

Integrando per parti si ha facilmente:

$$I_n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1}$$

Applicando n volte tale formula il calcolo di I_n si riconduce al calcolo di

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + c$$

Così, ad esempio:

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_1) = \\ &= x^3 e^x - 3[x^2 e^x - 2(xe^x - I_0)] = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c \end{aligned}$$

Esempio 63 Si calcoli l'integrale:

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad .$$

Assumendo come fattore differenziale $\sin x dx$ e come fattore finito $\sin^{n-1} x$, si ha integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \int \sin x \sin^{n-1} x dx = - \int \sin^{n-1} x d(\cos x) = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = - \sin^{n-1} x \cos x + \\ &\quad + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \end{aligned}$$

Di qui si trae facilmente la formula ricorrente:

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad .$$

E' ovvio che mediante tale formula il calcolo di I_n si riconduce a quello di:

$$I_0 = \int dx = x + c$$

se n è pari, e a quello di:

$$I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

se n è dispari.

Esempio 64 Si valuti l'integrale:

$$I_n = \int \arcsin^n x dx \quad .$$

Integrando per parti, col fattore differenziale dx , si trova:

$$I_n = \int \arcsin^n x dx = x \arcsin^n x - n \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{n-1} x dx$$

Si osservi, a tal punto, che:

$$D(\sqrt{1-x^2}) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\sqrt{1-x^2}) \quad .$$

Quindi è:

$$I_n = x \arcsin^n x + n \int \arcsin^{n-1} x d(\sqrt{1-x^2}) \quad (\text{B.4.1})$$

Integrando per parti quest'ultimo integrale è:

$$\int \arcsin^{n-1} x d(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} \arcsin^{n-1} x + \\ - (n-1) \int \arcsin^{n-2} x dx \quad .$$

Sostituendo questo risultato in (B.4.1) si ha:

$$I_n = x \arcsin^n x + n \sqrt{1-x^2} \arcsin^{n-1} x - n(n-1) I_{n-2}$$

Quest'ultima formula ricorrente condurrà al calcolo di:

$$I_0 = \int dx = x + c$$

nel caso in cui n sia pari, e a quello di:

$$I_1 = \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{D(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

nel caso in cui n sia dispari.

B.4.1 L'integrale della funzione $\frac{1}{(1+x^2)^n}$

Un'altra formula di riduzione, molto importante, è quella che si stabilisce per il calcolo dell'integrale:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1), \quad (\text{B.4.2})$$

Si ha:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx.$$

Per quest'ultimo integrale conviene osservare che:

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

sicchè è:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int x \frac{x}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{2} \int x \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^n} = \\ = \frac{1}{2} \int x (1+x^2)^{-n} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int x d \left(\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} \right)$$

Integrando per parti è:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx &= \frac{1}{2} x \frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{-n+1} \int (1+x^2)^{-n+1} dx = \\ &= -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \\ &= -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \end{aligned}$$

Quindi è:

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$$

ossia:

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}. \quad (\text{B.4.3})$$

B.5 Integrali delle funzioni razionali.

Il metodo d'integrazione per decomposizione in somma trova una importante applicazione nel problema dell'integrazione delle funzioni razionali.

Detti $n(x)$ e $D(x)$ due polinomi a coefficienti reali di cui il primo di grado n e il secondo di grado m consideriamo la funzione razionale:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

Se è $n \geq m$ possiamo eseguire la divisione di $N(x)$ per $D(x)$ e, detti $Q(x)$ e $R(x)$ il quoziente e il resto, si ha:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

da cui:

$$\int f(x) dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx.$$

Poichè sappiamo calcolare l'integrale del polinomio $Q(x)$, il problema dell'integrazione della funzione razionale $f(x)$ è ricondotto a quello dell'integrazione di un'altra funzione razionale nella quale il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore.

E' dunque di quest'ultimo problema che dobbiamo preoccuparci.

Cominciamo a considerare il caso particolare in cui $R(x)$ è di primo grado e $D(x)$ di secondo grado, supponiamo cioè che riesca:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{mx+n}{x^2+px+q} \quad (\text{B.5.1})$$

Il metodo da seguire per calcolare l'integrale di una tale funzione differisce a seconda del segno del discriminante del denominatore.

Se è $4q - p^2 > 0$ si scrive:

$$\frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{m}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{2n - mp}{2} \frac{1}{x^2 + px + q},$$

da cui:

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \frac{m}{2} \int d \log (x^2 + px + q) + \frac{2n - mp}{2} \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

i.e.:

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \frac{m}{2} \log (x^2 + px + q) + \frac{2n - mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c \quad (\text{B.5.2})$$

Se è $4q - p^2 < 0$ il polinomio a denominatore della nostra funzione ha due radici reali distinte α_1 e α_2 , e si ha pertanto:

$$x^2 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

Cerchiamo allora di determinare le costanti A_1 e A_2 in modo che riesca:

$$\frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2}$$

Tale formula, riducendo le due frazioni a secondo membro allo stesso denominatore, può anche scriversi:

$$\frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{(A_1 + A_2)x - (A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1)}{x^2 + px + q}$$

e affinché tale identità sussista, occorre e basta, per il principio di identità dei polinomi, che riesca:

$$A_1 + A_2 = m$$

$$A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1 = -n$$

ossia:

$$A_1 = \frac{m\alpha_1 + n}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad A_2 = -\frac{m\alpha_2 + n}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Dopo ciò si ha, in definitiva:

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \frac{m\alpha_1 + n}{\alpha_1 - \alpha_2} \log |x - \alpha_1| - \frac{m\alpha_2 + n}{\alpha_1 - \alpha_2} \log |x - \alpha_2| + c \quad (\text{B.5.3})$$

Supponiamo infine che sia $4q - p^2 = 0$ in tal caso il polinomio

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)^2$$

ha una sola radice doppia $\alpha = -\frac{p}{2}$ e si ha quindi:

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)^2$$

Cerchiamo allora di determinare le costanti A_1 e A_2 in modo che riesca:

$$\frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{d}{dx} \frac{B_1}{x - \tau}$$

Eseguendo la derivazione indicata nel secondo membro di tale formula e riducendo tale secondo membro allo stesso denominatore, si ha:

$$\frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{A_1x - A_2\alpha - B_1}{x^2 + px + q},$$

da cui:

$$m = A_1 \quad , \quad n = -(A_1\alpha + B_1)$$

e quindi:

$$A_1 = m \quad , \quad B_1 = -(m\alpha + n).$$

Dopo ciò si ha, in definitiva:

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = m \log|x - \alpha| - \frac{m\alpha + n}{x - \alpha} + c \quad (\text{B.5.4})$$

Esempio 65 Si voglia calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 4x + 7}{x^3 + x^2 + 3x - 5} dx$$

Si ha intanto:

$$\frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 4x + 7}{x^3 + x^2 + 3x - 5} = x + \frac{x + 7}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

Si osservi che l'equazione:

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0$$

ha la radice reale $x = 1$ per cui, mettendo in vista nel primo membro il fattore $(x - 1)$, essa può anche scriversi:

$$(x - 1)(x^2 + 2x + 5) = 0.$$

Poichè l'equazione di secondo grado:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

non ha radici reali, cerchiamo di determinare le costanti A, m, n in modo che riesca:

$$\frac{x + 7}{x^3 + x^2 + 3x - 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{mx + n}{x^2 + 2x + 5}.$$

Eliminando i denominatori da tale formula si ha:

$$x + 7 = (A + m)x^2 + (2A + n - m)x + 5A - n$$

da cui, eguagliando i coefficienti dei termini omologhi del primo e secondo membro, si ha:

$$A + m = 0 \quad , \quad 2A + n - m = 1 \quad , \quad 5A - n = 7$$

Da questo sistema di tre equazioni lineari nelle incognite A, m, n si ricava facilmente:

$$A = 1 \quad , \quad m = -1 \quad , \quad n = -2.$$

Si ha dunque, in definitiva:

$$\frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 4x + 7}{x^3 + x^2 + 3x - 5} = x + \frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 5}$$

da cui:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 4x + 7}{x^3 + x^2 + 3x - 5} dx = \frac{x^2}{2} + \log|x - 1| - \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 5) + \\ - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + c$$